

Une q - spécialisation pour les fonctions symétriques monomiales

Michel Lassalle

Centre National de la Recherche Scientifique

Ecole Polytechnique

91128 Palaiseau, France

e-mail: lassalle @ chercheur.com

Abstract

We obtain the specialization of monomial symmetric functions on the alphabet $(a-b)/(1-q)$. This gives a remarkable algebraic identity, and four new developments for the Macdonald polynomial associated with a row. The proofs are given in the framework of λ -ring theory.

1 Introduction

Dans l'étude des fonctions symétriques, la théorie des λ -anneaux est une méthode particulièrement efficace, et pourtant peu utilisée. On trouvera une illustration de cette théorie dans [5]. Le but de cet article est d'en présenter une nouvelle application.

Nous considérons le problème suivant : si f est une fonction symétrique et q une indéterminée, quelle est la valeur de $f(1, q, q^2, \dots, q^{N-1})$? Pour la plupart des fonctions symétriques classiques cette spécialisation est connue depuis très longtemps [1, 7, 8].

C'est le cas par exemple pour les fonctions de Schur, les sommes de puissances, les fonctions complètes ou les fonctions élémentaires. Dans ces deux derniers cas cette spécialisation est classique : ce sont les polynômes de Gauss.

Le but de cet article est de donner la spécialisation $f(1, q, q^2, \dots, q^{N-1})$ lorsque f est une fonction symétrique monomiale. Ce résultat n'était pas encore connu. Plus généralement nous donnons la spécialisation des fonctions symétriques monomiales sur l'alphabet $(a-b)/(1-q)$.

Il faut souligner que nous pouvons donner *deux formulations* distinctes pour cette spécialisation. L'équivalence de ces deux expressions produit une identité algébrique multivariée qui est difficile à démontrer directement. On a ainsi un nouvel exemple d'une situation où la théorie des λ -anneaux permet de démontrer rapidement une identité algébrique remarquable.

Nos deux résultats et leurs démonstrations s'expriment uniquement en termes de λ -anneaux. Mais ils possèdent des rapports étroits avec la théorie des polynômes de Macdonald [8].

Soient q et t deux indéterminées, et considérons l'algèbre des fonctions symétriques à coefficients rationnels en q et t . Les polynômes de Macdonald forment une base de cette algèbre, indexée par les partitions.

Notre résultat principal permet d'obtenir quatre nouveaux développements explicites pour le polynôme de Macdonald $P_{(n)}(q, t)$ associé à une partition-ligne (n) . Pour cela nous introduisons deux bases naturelles de fonctions symétriques “déformées”, qui sont restées jusqu'ici peu étudiées.

Enfin nous montrons que la spécialisation d'une fonction symétrique monomiale sur l'alphabet $(1-t)/(1-q)$ est essentiellement un polynôme en q et t à coefficients entiers positifs. Il est possible que ce résultat “à la Macdonald” ait d'intéressantes conséquences.

Donnons maintenant le plan de cet article. La Section 2 présente nos notations, et la Section 3 les éléments de théorie des λ -anneaux dont nous aurons besoin. Ces sections sont presque intégralement reprises de [5]. La Section 4 énonce la première formulation de notre résultat principal, qui est démontrée à la Section 5. La Section 6 donne et démontre la seconde formulation. La Section 7 met en évidence une identité algébrique remarquable et présente quelques unes de ses conséquences. La Section 8 explicite un polynôme en q et t à coefficients entiers positifs. La Section 9 introduit les polynômes de Macdonald en mettant l'accent sur une présentation en termes de λ -anneaux. La Section 10 donne les nouveaux développements de $P_{(n)}(q, t)$ annoncés.

L'auteur remercie Alain Lascoux pour son aide amicale.

2 Notations

Une partition λ est une suite décroissante finie d'entiers positifs. On dit que le nombre n d'entiers non nuls est la longueur de λ . On note $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $n = l(\lambda)$. On dit que $|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ est le poids de λ , et pour tout entier $i \geq 1$ que $m_i(\lambda) = \text{card}\{j : \lambda_j = i\}$ est la multiplicité de i dans λ . On appelle

part de λ tout entier i tel que $m_i(\lambda) \neq 0$. On pose

$$z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)!.$$

Soit **Sym** l'algèbre des fonctions symétriques. Nous choisissons les notations les plus répandues, c'est-à-dire celles de [8], et non celles de [6], bien que celles de [6] soient plus adaptées aux λ -anneaux.

Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ un ensemble de variables, qui peut être infini (nous dirons que A est un alphabet). On introduit les fonctions génératrices

$$E_u(A) = \prod_{a \in A} (1 + ua) \quad , \quad H_u(A) = \prod_{a \in A} \frac{1}{1 - ua} \quad , \quad P_u(A) = \sum_{a \in A} \frac{a}{1 - ua}$$

dont le développement définit les fonctions symétriques élémentaires $e_k(A)$, les fonctions complètes $h_k(A)$ et les sommes de puissances $p_k(A)$:

$$E_u(A) = \sum_{k \geq 0} u^k e_k(A) \quad , \quad H_u(A) = \sum_{k \geq 0} u^k h_k(A) \quad , \quad P_u(A) = \sum_{k \geq 1} u^{k-1} p_k(A).$$

Lorsque l'alphabet A est infini, chacun de ces trois ensembles de fonctions forme une base algébrique de **Sym** $[A]$, l'algèbre des fonctions symétriques sur A (c'est-à-dire que ses éléments sont algébriquement indépendants).

On peut donc définir l'algèbre **Sym** des fonctions symétriques, sans référence à l'alphabet A , comme l'algèbre sur **Q** engendrée par les fonctions e_k , h_k ou p_k .

Pour toute partition μ , on définit les fonctions e_μ , h_μ ou p_μ en posant

$$f_\mu = \prod_{i=1}^{l(\mu)} f_{\mu_i} = \prod_{k \geq 1} f_k^{m_k(\mu)},$$

où f_i désigne respectivement e_i , h_i ou p_i . Les fonctions e_μ , h_μ , p_μ forment une base linéaire de l'algèbre **Sym**.

On a la formule de Cauchy

$$e_n = \sum_{|\mu|=n} (-1)^{n-l(\mu)} \frac{p_\mu}{z_\mu}$$

soit encore

$$h_n = \sum_{|\mu|=n} \frac{p_\mu}{z_\mu}.$$

Pour toute partition μ , on peut définir les fonctions symétriques monomiales m_μ et les fonctions de Schur s_μ , qui forment également une base linéaire de l'algèbre **Sym**. La fonction symétrique monomiale m_μ est la somme de tous les monômes différents ayant pour exposant une permutation de μ .

Si A et B sont deux alphabets, on définit la somme $A + B$ et la différence $A - B$ de ces deux alphabets en posant

$$\begin{aligned} H_u(A + B) &= H_u(A) H_u(B) \quad , \quad E_u(A + B) = E_u(A) E_u(B) \\ H_u(A - B) &= H_u(A) H_u(B)^{-1} \quad , \quad E_u(A - B) = E_u(A) E_u(B)^{-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

3 λ -anneaux

Nous allons utiliser le fait que l'anneau des polynômes possède une structure de λ -anneau. Un λ -anneau est un anneau commutatif avec unité muni d'opérateurs qui vérifient certains axiomes. Nous renvoyons le lecteur à [2] pour la théorie générale, et au chapitre 2 de [9] pour son application à l'analyse multivariée.

Nous n'utiliserons cette théorie que dans le cadre élémentaire suivant. Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ un alphabet quelconque. On considère l'anneau $\mathbf{R}[A]$ des polynômes en A à coefficients réels. La structure de λ -anneau de $\mathbf{R}[A]$ consiste à définir une action de **Sym** sur $\mathbf{R}[A]$.

3.1 Action de Sym

Les fonctions p_k formant un système de générateurs algébriques de **Sym**, écrivant tout polynôme sous la forme $\sum_{c,U} c U$, avec c constante réelle et U un monôme en (a_1, a_2, a_3, \dots) , on définit une action de **Sym** sur $\mathbf{R}[A]$, notée $[\cdot]$, en posant

$$p_k \left[\sum_{c,U} c U \right] = \sum_{c,U} c U^k.$$

Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbf{R}[A]$ on en déduit immédiatement $p_k[PQ] = p_k[P]p_k[Q]$ et $p_\mu[PQ] = p_\mu[P]p_\mu[Q]$.

L'action ainsi définie s'étend à tout élément de **Sym**. Ainsi on a

$$E_u \left[\sum_{c,U} c U \right] = \prod_{c,U} (1 + u U)^c \quad , \quad H_u \left[\sum_{c,U} c U \right] = \prod_{c,U} (1 - u U)^{-c},$$

et aussi

$$h_k[P] = (-1)^k e_k[-P]. \quad (2)$$

On notera le comportement différent des constantes $c \in \mathbf{R}$ et des monômes U :

$$\begin{aligned} p_k[c] &= c \quad , \quad h_k[c] = \binom{c+k-1}{k} \quad , \quad e_k[c] = \binom{c}{k} \\ p_k[U] &= U^k = h_k[U] \quad , \quad e_k[U] = 0, i > 1 \quad , \quad e_1[U] = U. \end{aligned} \quad (3)$$

Il est plus correct de caractériser les “monômes” U comme éléments *de rang 1* (i.e. les $U \neq 0, 1$ tels que $e_k[U] = 0 \forall k > 1$), et les “constantes” $c \in \mathbf{R}$ comme les éléments invariants par les p_k (on dira aussi élément *de type binomial*).

Lorsqu’on utilise la théorie des λ -anneaux pour démontrer une identité algébrique, il est donc *toujours nécessaire de préciser le statut de chaque élément*. Dans cet article nous n’utiliserons que des éléments de rang 1.

3.2 Extension aux séries formelles

On remarquera que si a_1, a_2, \dots, a_N sont des éléments de rang 1, alors

$$p_k[a_1 + a_2 + \dots + a_N] = a_1^k + a_2^k + \dots + a_N^k$$

est la valeur de la somme de puissances $p_k(a_1, a_2, \dots, a_N)$.

Pour tout alphabet $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, on note $A^\dagger = \sum_i a_i$ la somme de ses éléments. Lorsque A est formé d’éléments de rang 1, on a ainsi pour toute fonction symétrique f ,

$$f[A^\dagger] = f(A). \quad (4)$$

En particulier si q est de rang 1, on a

$$p_k(1, q, q^2, q^3, \dots, q^{N-1}) = p_k\left[\sum_{i=0}^{N-1} q^i\right].$$

Il est naturel de vouloir écrire

$$\sum_{i=0}^{N-1} q^i = \frac{1 - q^N}{1 - q},$$

et d’étendre ainsi l’action de **Sym** aux fonctions rationnelles. Il est également naturel de considérer un alphabet infini $(1, q, q^2, q^3, \dots)$, de vouloir sommer la série

$$\sum_{i \geq 0} q^i = \frac{1}{1 - q},$$

et d'étendre ainsi l'action de **Sym** aux séries formelles à coefficients réels.

Pour cela on pose

$$p_k \left(\frac{\sum c U}{\sum d V} \right) = \frac{\sum c U^k}{\sum d V^k} ,$$

avec c, d constantes réelles et U, V des monômes en (a_1, a_2, a_3, \dots) .

L'action ainsi définie s'étend à tout élément de **Sym**. On munit ainsi l'anneau des séries formelles à coefficients réels d'une structure de λ -anneau.

3.3 Formulaire

Les relations fondamentales suivantes sont des conséquences directes des relations (3). Pour tous P, Q on a d'abord

$$\begin{aligned} h_n[P + Q] &= \sum_{k=0}^n h_{n-k}[P] h_k[Q] \\ e_n[P + Q] &= \sum_{k=0}^n e_{n-k}[P] e_k[Q]. \end{aligned}$$

Soit de manière équivalente

$$\begin{aligned} H_u[P + Q] &= H_u[P] H_u[Q] \quad , \quad E_u[P + Q] = E_u[P] E_u[Q] \\ H_u[P - Q] &= H_u[P] H_u[Q]^{-1} \quad , \quad E_u[P - Q] = E_u[P] E_u[Q]^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ces relations généralisent les définitions (1).

Si P est de rang 1 et Q arbitraire, on a

$$e_n[PQ] = P^n e_n[Q].$$

Si P et Q sont de rang 1, PQ est donc de rang 1, et on a

$$E_u[PQ] = 1 + u PQ. \quad (6)$$

Pour tous P, Q on a les formules de Cauchy suivantes

$$\begin{aligned} h_n[PQ] &= \sum_{|\mu|=n} \frac{1}{z_\mu} p_\mu[P] p_\mu[Q] \\ &= \sum_{|\mu|=n} m_\mu[P] h_\mu[Q] \\ &= \sum_{|\mu|=n} s_\mu[P] s_\mu[Q]. \end{aligned} \quad (7)$$

Ou de manière équivalente :

$$\begin{aligned}
e_n[PQ] &= \sum_{|\mu|=n} \frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{z_\mu} p_\mu[P] p_\mu[Q] \\
&= \sum_{|\mu|=n} m_\mu[P] e_\mu[Q] \\
&= \sum_{|\mu|=n} s_\mu[P] s_{\mu'}[Q],
\end{aligned} \tag{8}$$

où μ' désigne la partition transposée de μ .

3.4 q -calcul

Pour toute indéterminée a on note

$$(a; q)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i) \quad , \quad (a; q)_\infty = \prod_{i \geq 0} (1 - aq^i)$$

qu'on considère comme série formelle en a et q .

Soient trois éléments a, b, q et un alphabet $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. On suppose tous ces éléments de rang 1. Les relation (5) et (6) impliquent

$$\begin{aligned}
E_u \left[\frac{aX^\dagger}{1-q} \right] &= \prod_{i \geq 0} E_u [aq^i X^\dagger] = \prod_{k=1}^N \prod_{i \geq 0} E_u [aq^i x_k] \\
&= \prod_{k=1}^N \prod_{i \geq 0} (1 + uaq^i x_k) = \prod_{k=1}^N (-uax_k; q)_\infty.
\end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned}
H_u \left[\frac{aX^\dagger}{1-q} \right] &= \prod_{i \geq 0} H_u [aq^i X^\dagger] = \prod_{k=1}^N \prod_{i \geq 0} H_u [aq^i x_k] \\
&= \prod_{k=1}^N \prod_{i \geq 0} \frac{1}{1 - uaq^i x_k} = \prod_{k=1}^N \frac{1}{(uax_k; q)_\infty}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$H_1 \left[\frac{a-b}{1-q} X^\dagger \right] = H_1 \left[\frac{aX^\dagger}{1-q} \right] \left(H_1 \left[\frac{bX^\dagger}{1-q} \right] \right)^{-1} = \prod_{k=1}^N \frac{(bx_k; q)_\infty}{(ax_k; q)_\infty}.$$

Pour tout entier $n \geq 0$ on note désormais

$$g_n(X; q, t) = h_n \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right]. \quad (9)$$

On a la série génératrice

$$H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] = \sum_{n \geq 0} g_n(X; q, t) = \prod_{i=1}^N \frac{(tx_i; q)_\infty}{(x_i; q)_\infty}. \quad (10)$$

Les deux propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de ce qui précède. Cependant nous en donnons une démonstration directe à titre d'exemple.

Proposition 1. *On a*

$$\sum_{n \geq 0} q^n g_n(X; q, t) = H_1 \left[q \frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] = \left(\prod_{i=1}^N \frac{1-x_i}{1-tx_i} \right) H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right].$$

Preuve. On peut écrire

$$H_1 \left[q \frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] = H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger + (t-1)X^\dagger \right].$$

En appliquant (4) ceci devient

$$H_1 \left[q \frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] = H_1[(t-1)X^\dagger] H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right].$$

Mais on a

$$H_1[(t-1)X^\dagger] = H_1[tX^\dagger] H_1[X^\dagger]^{-1} = \prod_{i=1}^N \frac{1-x_i}{1-tx_i}.$$

□

Proposition 2. *On a*

$$H_1 \left[\frac{q-t}{1-q} X^\dagger \right] = \prod_{i=1}^N (1-x_i) H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right].$$

Preuve. On peut écrire

$$H_1 \left[\frac{q-t}{1-q} X^\dagger \right] = H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger - X^\dagger \right]$$

En appliquant (4) ceci devient

$$H_1 \left[\frac{q-t}{1-q} X^\dagger \right] = H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] H_1[X^\dagger]^{-1}.$$

□

4 Notre résultat principal

Etant donnée une partition μ , on note C_μ l'ensemble des multi-entiers distincts obtenus par permutation des parts de μ . On dit également que $c \in C_\mu$ est un “dérangement” de μ . Pour tout multi-entier $c = (c_1, \dots, c_{l(\mu)}) \in C_\mu$, on note $[c_i] = \sum_{k \leq i} c_k$ la somme partielle d'ordre i .

Soient a, b, q trois éléments de rang 1. Nous considérons l'alphabet A tel que

$$A^\dagger = \frac{a - b}{1 - q}.$$

L'alphabet A est la différence, au sens de (1), des deux alphabets infinis $\{a, aq, aq^2, \dots\}$ et $\{b, bq, bq^2, \dots\}$.

Soit m_μ la fonction symétrique monomiale associée à la partition μ . Nous explicitons la valeur de $m_\mu[A^\dagger]$. En particulier pour $a = 1$ et $b = q^N$, compte-tenu de (4), notre résultat donne la valeur de

$$m_\mu \left[\frac{1 - q^N}{1 - q} \right] = m_\mu(1, q, \dots, q^{N-1}).$$

Et pour $a = 1$ et $b = 0$ celle de

$$m_\mu \left[\frac{1}{1 - q} \right] = m_\mu(1, q, q^2, q^3, \dots).$$

Théorème 1. *Soient a, b, q trois éléments de rang 1. Pour toute partition μ on a*

$$m_\mu \left[\frac{a - b}{1 - q} \right] = \sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{a^{c_i} q^{[c_{i-1}]} - b^{c_i}}{1 - q^{[c_i]}}. \quad (11)$$

Le corollaire suivant était connu : voir [1], chapitre 2, et l'exemple 1.2.5 de [8]. Compte-tenu de (10), il s'agit du “théorème de Heine” classique

$$H_1 \left[\frac{1 - t}{1 - q} x \right] = \frac{(tx; q)_\infty}{(x; q)_\infty} = \sum_{n \geq 0} \frac{(t; q)_n}{(q; q)_n} x^n.$$

Corollaire. *Pour tout entier n on a*

$$e_n \left[\frac{a - b}{1 - q} \right] = \prod_{i=1}^n \frac{aq^{i-1} - b}{1 - q^i}$$

$$h_n \left[\frac{a - b}{1 - q} \right] = \prod_{i=1}^n \frac{a - bq^{i-1}}{1 - q^i}.$$

Preuve du corollaire. La première relation est la transcription du théorème pour la partition-colonne $\mu = 1^n$. On a alors $m_{1^n} = e_n$. Il n'y a qu'un seul dérangement de μ , avec $c_i = 1$ et $[c_i] = i$. La seconde relation s'en déduit par (2), en échangeant a et b . \square

On remarquera que le Théorème 1 est vérifié lorsque μ est une partition-ligne (n) . On a alors $m_{(n)} = p_n$. Il n'y a qu'un seul dérangement de μ , avec $c_1 = [c_1] = n$. Le Théorème 1 redonne dans ce cas la relation

$$p_n \left[\frac{a-b}{1-q} \right] = \frac{a^n - b^n}{1 - q^n},$$

ce qui est précisément la définition de l'action de p_n .

On note désormais

$$Z_\mu(a, b, q) = \sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{a^{c_i} q^{[c_{i-1}]} - b^{c_i}}{1 - q^{[c_i]}}.$$

Pour toute part i de μ , on note $\mu \setminus \{i\}$ la partition de longueur $l(\mu) - 1$ obtenue de μ par soustraction de i .

Proposition 3. *Pour toute partition μ on a*

$$(1 - q^{|\mu|}) Z_\mu(a, b, q) = \sum_{m_i(\mu) \neq 0} (a^i q^{|\mu|-i} - b^i) Z_{\mu \setminus \{i\}}(a, b, q). \quad (12)$$

Preuve. On considère tous les dérangements de μ dont la dernière composante est $c_{l(\mu)} = i$. On a alors $[c_{l(\mu)-1}] = |\mu| - i$ et $[c_{l(\mu)}] = |\mu|$. Par construction la somme de toutes ces contributions est exactement

$$Z_{\mu \setminus \{i\}}(a, b, q) \frac{(a^i q^{|\mu|-i} - b^i)}{1 - q^{|\mu|}}.$$

\square

Partant du cas initial $\mu = (n)$ la relation (12) détermine uniquement Z_μ par récurrence sur la longueur $l(\mu)$. Le Théorème 1 sera donc démontré si l'on établit que le membre de gauche de (11) satisfait la même relation de récurrence.

Les deux membres de (11) étant clairement homogènes de degré $|\mu|$, il suffit de démontrer le théorème dans le cas particulier $a = 1$, ce que nous supposons désormais.

5 Démonstration

Nous sommes ainsi conduits à démontrer le Théorème 1 sous la forme suivante.

Théorème 2. *Soient q et t deux éléments de rang 1. Pour toute partition μ on a*

$$(1 - q^{|\mu|}) m_\mu \left[\frac{1-t}{1-q} \right] = \sum_{\substack{i \\ m_i(\mu) \neq 0}} (q^{|\mu|-i} - t^i) m_{\mu \setminus \{i\}} \left[\frac{1-t}{1-q} \right].$$

Preuve. Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ un alphabet de cardinal N dont les éléments sont de rang 1. Compte-tenu de la relation (4), de la définition (9) et de la formule de Cauchy (7), on a immédiatement

$$g_n(X; q, t) = h_n \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] = \sum_{|\mu|=n} m_\mu \left[\frac{1-t}{1-q} \right] h_\mu(X).$$

En identifiant les parties homogènes de chaque membre, le Théorème 2 est donc équivalent à la relation suivante

$$\sum_{n \geq 0} (1 - q^n) g_n(X; q, t) = \left(\sum_{r \geq 1} h_r(X) \right) \left(\sum_{n \geq 0} q^n g_n(X; q, t) \right) - \left(\sum_{r \geq 1} t^r h_r(X) \right) \left(\sum_{n \geq 0} g_n(X; q, t) \right).$$

Soit encore

$$\sum_{n \geq 0} (1 - q^n) g_n(X; q, t) = \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{1-x_i} - 1 \right) \left(\sum_{n \geq 0} q^n g_n(X; q, t) \right) - \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{1-tx_i} - 1 \right) \left(\sum_{n \geq 0} g_n(X; q, t) \right).$$

On applique alors la Proposition 1. Le membre de gauche peut s'écrire

$$\left(1 - \prod_{i=1}^N \frac{1-x_i}{1-tx_i} \right) H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right].$$

Et le membre de droite s'écrit

$$\left[\left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{1-x_i} - 1 \right) \left(\prod_{i=1}^N \frac{1-x_i}{1-tx_i} \right) - \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{1-tx_i} - 1 \right) \right] H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right].$$

D'où l'assertion. \square

6 Seconde formulation

Il est remarquable que nous puissions donner une seconde formulation de notre résultat principal.

Théorème 3. *Soient a, b, q trois éléments de rang 1. Pour toute partition μ on a*

$$m_\mu \left[\frac{a-b}{1-q} \right] = \sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{a^{c_i} q^{(l(\mu)-i)c_i} - b^{c_i}}{1 - q^{[c_i]}}.$$

Notre démonstration du Théorème 3 est exactement parallèle à celle du Théorème 1. On note

$$W_\mu(a, b, q) = \sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{a^{c_i} q^{(l(\mu)-i)c_i} - b^{c_i}}{1 - q^{[c_i]}}.$$

Proposition 4. *Pour toute partition μ on a*

$$(1 - q^{|\mu|}) W_\mu(a, b, q) = \sum_{\substack{i \\ m_i(\mu) \neq 0}} (a^i - b^i) W_{\mu \setminus \{i\}}(qa, b, q).$$

Preuve. On considère tous les dérangements de μ dont la dernière composante est $c_{l(\mu)} = i$. On a alors $[c_{l(\mu)}] = |\mu|$. Par construction la somme de toutes ces contributions est exactement

$$W_{\mu \setminus \{i\}}(qa, b, q) \frac{(a^i - b^i)}{1 - q^{|\mu|}}.$$

□

Partant du cas initial évident $\mu = (n)$, la Proposition 4 détermine uniquement W_μ par récurrence sur la longueur $l(\mu)$. Le Théorème 3 sera donc démontré si l'on établit que $m_\mu[(a-b)/(1-q)]$ satisfait la même relation de récurrence. Par homogénéité il suffit de le démontrer dans le cas particulier $a = 1$, ce que nous supposerons désormais.

Nous pouvons donc démontrer le Théorème 3 sous la forme suivante.

Théorème 4. *Soient q et t deux éléments de rang 1. Pour toute partition μ on a*

$$(1 - q^{|\mu|}) m_\mu \left[\frac{1-t}{1-q} \right] = \sum_{\substack{i \\ m_i(\mu) \neq 0}} (1 - t^i) m_{\mu \setminus \{i\}} \left[\frac{q-t}{1-q} \right].$$

Preuve. Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ un alphabet de cardinal N dont les éléments sont de rang 1. Compte-tenu de (4) la formule de Cauchy (7) s'écrit

$$h_n \left[\frac{u-t}{1-q} X^\dagger \right] = \sum_{|\mu|=n} m_\mu \left[\frac{u-t}{1-q} \right] h_\mu(X).$$

On va choisir $u = 1$ et $u = q$.

En identifiant les parties homogènes de chaque membre, le Théorème 3 est équivalent à la relation suivante

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (1 - q^n) h_n \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] = \\ \left(\sum_{r \geq 1} h_r(X) - \sum_{r \geq 1} t^r h_r(X) \right) \left(\sum_{n \geq 0} h_n \left[\frac{q-t}{1-q} X^\dagger \right] \right). \end{aligned}$$

Soit encore

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (1 - q^n) g_n(X; q, t) = \\ \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{1-x_i} - \prod_{i=1}^N \frac{1}{1-tx_i} \right) \left(\sum_{n \geq 0} h_n \left[\frac{q-t}{1-q} X^\dagger \right] \right). \end{aligned}$$

Par la Proposition 1 le membre de gauche peut s'écrire

$$\left(1 - \prod_{i=1}^N \frac{1-x_i}{1-tx_i} \right) H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right].$$

Et par la Proposition 2 le membre de droite peut s'écrire

$$\left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{1-x_i} - \prod_{i=1}^N \frac{1}{1-tx_i} \right) \prod_{i=1}^N (1-x_i) H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right].$$

D'où l'assertion. □

7 Une identité remarquable

La comparaison des Théorèmes 1 et 3 produit l'identité remarquable suivante.

Théorème 5. *Pour toute partition μ on a*

$$\sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{a^{c_i} q^{[c_{i-1}]} - b^{c_i}}{1 - q^{[c_i]}} = \sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{a^{c_i} q^{(l(\mu)-i)c_i} - b^{c_i}}{1 - q^{[c_i]}}.$$

Un cas particulier intéressant est obtenu en faisant $a = q$ et $b = 1$.

Proposition 5. *Pour toute partition μ on a*

$$\sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1 - q^{(l(\mu)-i+1)c_i}}{1 - q^{[c_i]}} = \frac{l(\mu)!}{\prod_i m_i(\mu)!}.$$

On peut prendre la limite de ce résultat lorsque q tend vers 1.

Proposition 6. *Pour toute partition μ on a*

$$\frac{1}{z_\mu} = \sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1}{[c_i]}.$$

Nous retrouvons ainsi un énoncé de Littlewood ([7], p. 85) qui l'a démontré par récurrence.

Soient $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ deux alphabets de cardinal n . On note S_n le groupe des permutations de n lettres. Le groupe S_n opère sur les fonctions rationnelles en X et Y par l'action diagonale

$$f^\sigma(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}).$$

Par homogénéité et parce que les indéterminées $x_i = q^{\mu_i}$, $y_i = (bq/a)^{\mu_i}$ sont indépendantes, l'égalité du Théorème 5 est en fait *équivalente* à l'identité multivariée suivante, qui est une propriété des fonctions rationnelles.

Théorème 6. *On a*

$$\sum_{\sigma \in S_n} \left(\frac{y_1 - x_1}{1 - x_1} \frac{y_2 - x_1 x_2}{1 - x_1 x_2} \frac{y_3 - x_1 x_2 x_3}{1 - x_1 x_2 x_3} \dots \frac{y_n - x_1 x_2 \dots x_n}{1 - x_1 x_2 \dots x_n} \right)^\sigma = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\frac{y_1 - x_1^n}{1 - x_1} \frac{y_2 - x_2^{n-1}}{1 - x_1 x_2} \frac{y_3 - x_3^{n-2}}{1 - x_1 x_2 x_3} \dots \frac{y_n - x_n}{1 - x_1 x_2 \dots x_n} \right)^\sigma.$$

Le caractère remarquable de cette identité est déjà apparent sur le cas particulier $Y = (1, 1, \dots, 1)$.

Proposition 7. *Pour tout alphabet $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ on a*

$$\sum_{\sigma \in S_n} \left(\frac{1-x_1^n}{1-x_1} \frac{1-x_2^{n-1}}{1-x_1x_2} \frac{1-x_3^{n-2}}{1-x_1x_2x_3} \cdots \frac{1-x_n}{1-x_1x_2 \cdots x_n} \right)^\sigma = n!.$$

On en déduit la propriété suivante.

Proposition 8. *Pour tout alphabet $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ on a*

$$\sum_{\sigma \in S_n} \left(\frac{1}{x_1(x_1+x_2) \cdots (x_1+x_2+\cdots+x_n)} \right)^\sigma = \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

Preuve. On considère l'identité de la Proposition 7, dans laquelle on substitue q^{x_i} à x_i . Elle devient

$$\sum_{\sigma \in S_n} \left(\frac{1-q^{nx_1}}{1-q^{x_1}} \frac{1-q^{(n-1)x_2}}{1-q^{x_1+x_2}} \frac{1-q^{(n-2)x_3}}{1-q^{x_1+x_2+x_3}} \cdots \frac{1-q^{x_n}}{1-q^{x_1+x_2+\cdots+x_n}} \right)^\sigma = n!.$$

On obtient l'énoncé en prenant la limite $q \rightarrow 1$. □

Alain Lascoux a obtenu une preuve directe de cette identité multivariée, en utilisant les différences divisées. Il nous a également montré que le Théorème 6 énonce l'égalité de deux statistiques sur le groupe des permutations. Nous présentons maintenant l'essentiel de ses remarques.

Etant donnée une permutation de n lettres $\sigma \in S_n$, soit $\Gamma(\sigma)$ l'ensemble de ses cycles. Pour tout cycle $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \subset \{1, 2, \dots, n\}$, notons $|\gamma| = \sum_{i=1}^k \gamma_i$. Alors on sait ([6], §1.2.7) que pour toute partition μ on a

$$\left(\prod_{i \geq 1} m_i(\mu)! \right) m_\mu = \sum_{\sigma \in S_{l(\mu)}} (-1)^{l(\mu) - \text{card}(\Gamma(\sigma))} \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} p_{|\gamma|}.$$

Par exemple on a $m_{kl} = p_k p_l - p_{k+l}$, chacun des termes correspondant aux deux cycles $\{k\}, \{l\}$ de $\{k, l\}$ et au cycle $\{k, l\}$ de $\{l, k\}$. On en déduit immédiatement

$$\left(\prod_{i \geq 1} m_i(\mu)! \right) m_\mu \left[\frac{a-b}{1-q} \right] = \sum_{\sigma \in S_{l(\mu)}} (-1)^{l(\mu) - \text{card}(\Gamma(\sigma))} \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} \frac{a^{|\gamma|} - b^{|\gamma|}}{1 - q^{|\gamma|}}.$$

Par homogénéité et parce que les indéterminées $x_i = q^{\mu_i}$, $y_i = (bq/a)^{\mu_i}$ sont indépendantes, ceci implique immédiatement le résultat suivant.

Théorème 7. Soient $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ deux alphabets de cardinal n . On a

$$\sum_{\sigma \in S_n} \left(\frac{y_1 - x_1}{1 - x_1} \frac{y_2 - x_1 x_2}{1 - x_1 x_2} \frac{y_3 - x_1 x_2 x_3}{1 - x_1 x_2 x_3} \dots \frac{y_n - x_1 x_2 \dots x_n}{1 - x_1 x_2 \dots x_n} \right)^\sigma = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{\substack{\gamma \in \Gamma(\sigma) \\ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)}} \frac{y_{\gamma_1} y_{\gamma_2} \dots y_{\gamma_k} - x_{\gamma_1} x_{\gamma_2} \dots x_{\gamma_k}}{1 - x_{\gamma_1} x_{\gamma_2} \dots x_{\gamma_k}}.$$

Tandis que le Théorème 6 concerne la symétrisation de deux fonctions rationnelles, le Théorème 7 fait intervenir la structure des cycles d'une permutation, ce qui est une information non immédiate sur cette permutation.

Nous donnons en Appendice une preuve directe du Théorème 7, par récurrence sur l'entier n . Nous ne connaissons pas de preuve directe du Théorème 6.

Exemple : Le cas $n = 1$ est trivial. Dans le cas $n = 2$, les deux identités des Théorèmes 6 et 7 s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - x_1}{1 - x_1} \frac{y_2 - x_1 x_2}{1 - x_1 x_2} + \frac{y_2 - x_2}{1 - x_2} \frac{y_1 - x_1 x_2}{1 - x_1 x_2} = \\ \frac{y_1 - x_1^2}{1 - x_1} \frac{y_2 - x_2}{1 - x_1 x_2} + \frac{y_2 - x_2^2}{1 - x_2} \frac{y_1 - x_1}{1 - x_1 x_2} = \\ \frac{y_1 - x_1}{1 - x_1} \frac{y_2 - x_2}{1 - x_2} + \frac{y_1 y_2 - x_1 x_2}{1 - x_1 x_2}. \end{aligned}$$

8 Coefficients entiers positifs

Nous allons voir que dans l'énoncé du Théorème 3,

$$m_\mu \left[\frac{1-t}{1-q} \right] = \sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{q^{(l(\mu)-i)c_i} - t^{c_i}}{1 - q^{[c_i]}}$$

le membre de droite met en évidence un polynôme en q et t à coefficients entiers positifs.

Théorème 8. Pour toute partition μ on a

$$m_\mu \left[\frac{1-t}{1-q} \right] = \frac{l(\mu)!}{\prod_i m_i(\mu)!} \left(\prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{q^{i-1} - t}{1 - q^i} \right) \frac{H_\mu(q, t)}{q^{|\mu| - l(\mu)} H_\mu(q, 1/q)}.$$

où $H_\mu(q, t)$ est un polynôme en q et t , et $q^{|\mu| - l(\mu)} H_\mu(q, 1/q)$ un polynôme en q . Les coefficients de $H_\mu(q, t)$ sont entiers positifs.

Preuve. Considérons le polynôme $P_\mu(q)$ défini par

$$P_\mu(q) = \prod_{k=1}^{l(\mu)} \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq l(\mu)} \frac{1 - q^{\sum \mu_{i_j}}}{1 - q}.$$

C'est évidemment un polynôme en q à coefficients entiers positifs. Posons

$$H_\mu(q, t) = P_\mu(q) \sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{q^{(l(\mu)-i)c_i} - t^{c_i}}{q^{l(\mu)-i} - t} \frac{1 - q}{1 - q^{[c_i]}}.$$

Il est clair qu'on définit ainsi un polynôme en q et t à coefficients entiers positifs. On a immédiatement

$$q^{|\mu|-l(\mu)} H_\mu(q, 1/q) = P_\mu(q) \sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1 - q^{(l(\mu)-i+1)c_i}}{1 - q^{l(\mu)-i+1}} \frac{1 - q}{1 - q^{[c_i]}}.$$

On en déduit que $q^{|\mu|-l(\mu)} H_\mu(q, 1/q)$ est un polynôme en q . D'autre part on a

$$H_\mu(q, t) = P_\mu(q) \left(\prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1 - q}{q^{i-1} - t} \right) \sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{q^{(l(\mu)-i)c_i} - t^{c_i}}{1 - q^{[c_i]}}.$$

Mais en appliquant la Proposition 5 on a aussi

$$\frac{l(\mu)!}{\prod_i m_i(\mu)!} P_\mu(q) = q^{|\mu|-l(\mu)} \left(\prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1 - q^i}{1 - q} \right) H_\mu(q, 1/q).$$

D'où l'énoncé. □

Exemple : Dans le cas particulier d'une partition $\mu = (n, k)$, avec deux parts distinctes $n \neq k$, on a

$$P_{n,k}(q) = \frac{1 - q^n}{1 - q} \frac{1 - q^k}{1 - q} \frac{1 - q^{n+k}}{1 - q}.$$

Le polynôme $H_{n,k}(q, t)$ est donné par

$$H_{n,k}(q, t) = \frac{q^n - t^n}{q - t} \frac{1 - t^k}{1 - t} \frac{1 - q^k}{1 - q} + \frac{q^k - t^k}{q - t} \frac{1 - t^n}{1 - t} \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Dans le cas général, il serait intéressant de disposer d'une interprétation combinatoire de $H_\mu(q, t)$.

9 Polynômes de Macdonald

La référence pour les polynômes de Macdonald est le Chapitre 6 de [8]. Nous rappelons seulement ici les éléments dont nous aurons besoin, en mettant l'accent sur une présentation en termes de λ -anneaux.

Soient deux éléments q, t et un alphabet $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. On suppose tous ces éléments de rang 1. Pour tout $1 \leq i \leq N$, on pose

$$A_i(X; t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}.$$

On note T_{x_i} l'opérateur de q -déformation défini par

$$T_{x_i} f(x_1, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, qx_i, \dots, x_N).$$

Les polynômes de Macdonald $P_\lambda(X; q, t)$ sont les vecteurs propres de l'opérateur aux différences

$$D(X; q, t) = \sum_{i=1}^N A_i(X; t) T_{x_i}.$$

On a

$$D(X; q, t) P_\lambda(X; q, t) = \left(\sum_{i=1}^N q^{\lambda_i} t^{N-i} \right) P_\lambda(X; q, t).$$

On peut munir l'algèbre des fonctions symétriques à coefficients rationnels en q et t d'un produit scalaire $\langle, \rangle_{q,t}$ défini par

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda p_\lambda \left[\frac{1-q}{1-t} \right].$$

Les polynômes de Macdonald $P_\lambda(X; q, t)$ forment une base orthogonale pour ce produit scalaire. Si on note $Q_\lambda(X; q, t)$ la base duale on a

$$\begin{aligned} H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger Y^\dagger \right] &= \sum_{\lambda} P_\lambda(X; q, t) Q_\lambda(Y; q, t) \\ &= \sum_{\lambda} h_\lambda \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] m_\lambda(Y) \\ &= \sum_{\lambda} s_\lambda [(1-t) X^\dagger] s_\lambda \left[\frac{Y^\dagger}{1-q} \right]. \end{aligned}$$

où les deux dernières relations résultent de la formule de Cauchy (7).

On sait ([8], relation (4.9), p. 323) que le polynôme de Macdonald $P_{(n)}(X; q, t)$ est proportionnel à $g_n(X; q, t)$. Cependant dans [8] ce résultat n'est pas démontré directement. Il nous paraît intéressant d'en présenter une démonstration directe dans le cadre des λ -anneaux.

Théorème 9. *On a*

$$D(X; q, t) g_n(X; q, t) = \left(q^n t^{N-1} + \frac{1 - t^{N-1}}{1 - t} \right) g_n(X; q, t).$$

Preuve. Nous donnons une preuve élémentaire, mais il s'agit d'un cas particulier du Théorème 2.1 de [3], qui est beaucoup plus général. Compte-tenu de la définition (9), il faut prouver

$$D(X; q, t) H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] = t^{N-1} \sum_{n \geq 0} q^n g_n(X; q, t) + \frac{1 - t^{N-1}}{1 - t} H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right].$$

Compte-tenu de la Proposition 1, ceci est équivalent à

$$D(X; q, t) H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] = \left(t^{N-1} \prod_{i=1}^N \frac{1 - x_i}{1 - tx_i} + \frac{1 - t^{N-1}}{1 - t} \right) H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right].$$

Mais on voit facilement que

$$T_{x_i} h_n \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] = h_n \left[\frac{1-t}{1-q} (X^\dagger + (q-1)x_i) \right] = h_n \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger + (t-1)x_i \right].$$

En appliquant (5) ceci s'écrit

$$\begin{aligned} T_{x_i} H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] &= H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger + (t-1)x_i \right] \\ &= H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] H_1[(t-1)x_i] \\ &= H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] \frac{1 - x_i}{1 - tx_i}. \end{aligned}$$

L'assertion est alors une conséquence immédiate de la proposition suivante. \square

Proposition 9. *On a*

$$\sum_{i=1}^N A_i(X; t) = \frac{1 - t^N}{1 - t}$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{1 - tx_i} A_i(X; t) = \frac{t^{N-1}}{1 - t} \left(1 - \prod_{i=1}^N \frac{1 - x_i}{1 - tx_i} \right).$$

Preuve. Le principe est celui donné dans l'exemple 6.3.2 (a) de [8]. Il suffit de choisir $u = 0$ et $u = 1/t$ dans l'identité de décomposition en éléments simples suivante

$$\prod_{i=1}^N \frac{tu - x_i}{u - x_i} = (t - 1) \sum_{i=1}^N \frac{x_i A_i(X; t)}{u - x_i} + t^N.$$

Cette relation est une interpolation de Lagrange. Définissons le résultant de deux alphabets A et B par

$$R(A, B) = \prod_{a \in A, b \in B} (a - b).$$

On rappelle [4] que si $f(a)$ est un polynôme ayant a^N comme terme de plus haut degré, on a

$$\sum_{a \in A} \frac{f(a)}{R(a, A - a)} = 1$$

pour tout alphabet A de cardinal $N + 1$. La relation précédente n'est autre que cette identité écrite pour $A = X + u$ et $f(a) = R(a, X/t)$, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i - x_i/t}{x_i - u} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{x_i - x_j/t}{x_i - x_j} + \prod_{i=1}^N \frac{u - x_i/t}{u - x_i} = 1.$$

□

10 Développements

Les Théorèmes 1 et 3 permettent d'écrire plusieurs développements explicites pour le polynôme de Macdonald $g_n(X; q, t)$. A chaque fois, il s'agit d'une application élémentaire de la relation (4), de la définition (9) et des formules de Cauchy (7–8).

10.1 Bases classiques

Nous redonnons d'abord deux résultats connus. Le premier est l'exemple 6.8.8(a) de [8]. On a

$$\begin{aligned} g_n(X; q, t) &= \sum_{|\mu|=n} \frac{1}{z_\mu} p_\mu \left[\frac{1-t}{1-q} \right] p_\mu[X^\dagger] \\ &= \sum_{|\mu|=n} \frac{1}{z_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1-t^{\mu_i}}{1-q^{\mu_i}} p_\mu(X). \end{aligned}$$

Le second est l'exemple 6.2.1 de [8]. On a

$$\begin{aligned} g_n(X; q, t) &= \sum_{|\mu|=n} h_\mu \left[\frac{1-t}{1-q} \right] m_\mu[X^\dagger] \\ &= \sum_{|\mu|=n} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{(t; q)_{\mu_i}}{(q; q)_{\mu_i}} m_\mu(X) \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du Corollaire du Théorème 1.

Les relations suivantes sont nouvelles. On a

$$\begin{aligned} g_n(X; q, t) &= \sum_{|\mu|=n} m_\mu \left[\frac{1-t}{1-q} \right] h_\mu[X^\dagger] \\ &= \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(1, t, q) h_\mu(X). \end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned} g_n(X; q, t) &= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} m_\mu \left[\frac{t-1}{1-q} \right] e_\mu[X^\dagger] \\ &= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(t, 1, q) e_\mu(X). \end{aligned}$$

10.2 Bases “déformées”

Pour toute partition μ on pose

$$E_\mu(X; t) = e_\mu[(1-t)X^\dagger] \quad , \quad H_\mu(X; t) = h_\mu[(1-t)X^\dagger].$$

En appliquant les formules de Cauchy (7–8), nous obtenons le développement explicite de $g_n(X; q, t)$ sur ces bases

$$\begin{aligned} g_n(X; q, t) &= \sum_{|\mu|=n} m_\mu \left[\frac{1}{1-q} \right] h_\mu[(1-t)X^\dagger] \\ &= \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(1, 0, q) H_\mu(X; t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_n(X; q, t) &= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} m_\mu \left[\frac{1}{q-1} \right] e_\mu[(1-t)X^\dagger] \\ &= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(0, 1, q) E_\mu(X; t). \end{aligned}$$

Considérons l'endomorphisme $\omega_{q,t} : f \rightarrow \omega_{q,t}(f)$ défini sur toute fonction symétrique homogène par

$$\omega_{q,t}(f)[X] = (-1)^{\deg(f)} f \left[\frac{q-1}{1-t} X \right].$$

Compte-tenu de (2) on a immédiatement

$$\omega_{q,t}(g_n(X; q, t)) = e_n(X)$$

$$\omega_{q,t}(E_\mu(X; t)) = H_\mu(X; q) \quad , \quad \omega_{q,t}(H_\mu(X; t)) = E_\mu(X; q).$$

10.3 Formulaire

Les fonctions $E_n(X; t)$ et $H_n(X; t)$, et donc les bases $E_\mu(X; t)$ et $H_\mu(X; t)$, sont explicitement connues.

Proposition 10. *Pour tout entier $n \geq 1$ on a*

$$\begin{aligned} E_n(X; t) &= (-t)^n g_n(X; 0, 1/t) = (-1)^n t^{n-N} (t-1) \sum_{i=1}^N A_i(X; t) x_i^n \\ H_n(X; t) &= g_n(X; 0, t) = t^{N-1} (1-t) \sum_{i=1}^N A_i(X; 1/t) x_i^n. \end{aligned}$$

Preuve. Les premières égalités sont évidentes. Les secondes résultent de l'exemple 6.3.2 (a) de [8], qui se démontre comme la Proposition 9. \square

On en déduit le développement des fonctions $E_n(X; t)$ ou $H_n(X; t)$ sur les bases classiques. En effet les formules de Cauchy de la Section 10.1 impliquent immédiatement

$$\begin{aligned}
E_n(X; t) &= \sum_{|\mu|=n} \frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{z_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} (1 - t^{\mu_i}) p_\mu(X) \\
&= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(t, 1, 0) h_\mu(X) \\
&= \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(1, t, 0) e_\mu(X) \\
&= \sum_{|\mu|=n} (-t)^{n-l(\mu)} (1 - t)^{l(\mu)} m_\mu(X).
\end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned}
H_n(X; t) &= \sum_{|\mu|=n} \frac{1}{z_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} (1 - t^{\mu_i}) p_\mu(X) \\
&= \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(1, t, 0) h_\mu(X) \\
&= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(t, 1, 0) e_\mu(X) \\
&= \sum_{|\mu|=n} (1 - t)^{l(\mu)} m_\mu(X).
\end{aligned}$$

Inversement on a

$$\begin{aligned}
h_n(X) &= g_n(X; q, q) \\
&= \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(1, 0, q) H_\mu(X; q) \\
&= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(0, 1, q) E_\mu(X; q).
\end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned}
e_n(X) &= \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(1, 0, q) E_\mu(X; q) \\
&= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(0, 1, q) H_\mu(X; q).
\end{aligned}$$

11 Appendice

Nous donnons ici une preuve directe du Théorème 7.

Théorème. Soient $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ deux alphabets de cardinal n . On a

$$\sum_{\sigma \in S_n} \left(\frac{y_1 - x_1}{1 - x_1} \frac{y_2 - x_1 x_2}{1 - x_1 x_2} \frac{y_3 - x_1 x_2 x_3}{1 - x_1 x_2 x_3} \dots \frac{y_n - x_1 x_2 \dots x_n}{1 - x_1 x_2 \dots x_n} \right)^\sigma =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \prod_{\substack{\gamma \in \Gamma(\sigma) \\ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)}} \frac{y_{\gamma_1} y_{\gamma_2} \dots y_{\gamma_k} - x_{\gamma_1} x_{\gamma_2} \dots x_{\gamma_k}}{1 - x_{\gamma_1} x_{\gamma_2} \dots x_{\gamma_k}}.$$

Preuve. Les deux membres de l'identité sont linéaires en y_n . Il suffit donc de la démontrer pour $y_n = 1$ et $y_n = x_n$.

Soit L_n (resp. R_n) le membre de gauche (resp. de droite). Par récurrence sur l'entier n , il suffit de démontrer que pour $f_n = L_n$ et $f_n = R_n$, on a les deux relations

$$f_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_{n-1}(x_1, \dots, x_i x_n, \dots, x_{n-1}; y_1, \dots, y_i x_n, \dots, y_{n-1}) \quad (13)$$

$$f_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{n-1}, 1) = f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}; y_1, \dots, y_{n-1}) +$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_{n-1}(x_1, \dots, x_i x_n, \dots, x_{n-1}; y_1, \dots, y_i, \dots, y_{n-1}). \quad (14)$$

A titre d'exemple, nous montrons (13) pour L_n et (14) pour R_n . La vérification de (13) pour R_n et (14) pour L_n est exactement identique. Nous la laissons au lecteur.

Pour $y_n = x_n$ seules les permutations avec $\sigma(1) \neq n$ contribuent au membre de gauche. Supposons qu'on a $\sigma(i) = n$ avec $i \neq 1$. Le terme

$$\frac{y_{\sigma(i-1)} - x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i-1)}}{1 - x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i-1)}} \frac{y_{\sigma(i)} - x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i)}}{1 - x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i)}}$$

devient

$$\frac{y_{\sigma(i-1)} - x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i-1)}}{1 - x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i-1)}} \frac{x_n(1 - x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i-1)})}{1 - x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i)}} = \frac{y_{\sigma(i-1)} x_n - x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i-1)} x_n}{1 - x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i-1)} x_n}.$$

Ce qui prouve (13) pour le membre de gauche.

Pour $y_n = 1$ toutes les permutations contenant le cycle (n) contribuent au terme $R_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}; y_1, \dots, y_{n-1})$. Toutes les autres permutations ont un cycle $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ de la forme (δn) , avec $\delta = (\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1})$. La contribution de ce cycle est

$$\frac{y_{\gamma_1} y_{\gamma_2} \cdots y_{\gamma_k} - x_{\gamma_1} x_{\gamma_2} \cdots x_{\gamma_k}}{1 - x_{\gamma_1} x_{\gamma_2} \cdots x_{\gamma_k}} = \frac{y_{\gamma_1} y_{\gamma_2} \cdots y_{\gamma_{k-1}} - x_{\gamma_1} x_{\gamma_2} \cdots x_{\gamma_{k-1}} x_n}{1 - x_{\gamma_1} x_{\gamma_2} \cdots x_{\gamma_{k-1}} x_n}.$$

Ce qui démontre (14) pour le membre de droite. \square

References

- [1] G. E. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopaedia of Mathematics and its applications, Volume 2, Addison-Wesley (1976).
- [2] D. Knutson, *λ -rings and the representation theory of the symmetric group*, Lecture Notes in Mathematics **308**, Springer (1973).
- [3] L. Lapointe, A. Lascoux, J. Morse, *Determinantal expressions for Macdonald polynomials*, I. M. R. N. , **18** (1998), 957–978.
- [4] A. Lascoux, *Notes on interpolation in one and several variables*, <http://phalanstere.univ-mlv.fr/~al/>.
- [5] A. Lascoux, M. Lassalle, *Une identité remarquable en théorie des partitions*, Math. Annalen, ? (2000), ?–?.
- [6] A. Lascoux, M. P. Schützenberger, *Formulaire raisonné de fonctions symétriques*, Université Paris 7 (1985).
- [7] D. E. Littlewood, *The theory of group characters*, second edition, Oxford University Press, Oxford (1950).
- [8] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second edition, Clarendon Press, Oxford (1999).
- [9] V. Prosper, *Combinatoire des polynômes multivariés*, Thèse, Université Paris 7 (1999), <ftp://schubert.univ-mlv.fr/pub/thesis/Vincent.Prosper/vpthesis.html>.